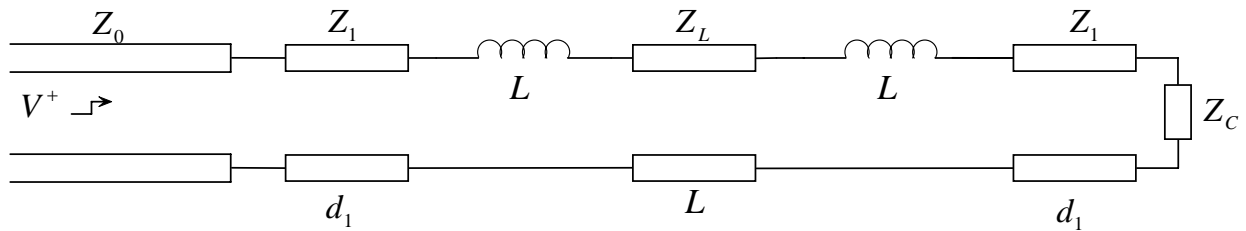


ESERCIZIO 4 - TUTORATO PROPAGAZIONE A.A. 06/07

03-04/04/2007



$$f = 3 \text{ GHz}$$

$$V^+ = 20 \text{ V}$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$d_1 = 6.25 \text{ mm}$$

$$\epsilon_1 = 4$$

$$L = 25 \text{ mm}$$

$$Z_C = (80 - j \cdot 30) \Omega$$

La linea di ingresso di impedenza Z_0 è in aria.

Si determinino il valore di Z_1 che consente di avere una impedenza di ingresso reale sulla linea a monte del carico.

Determinare i valori di Z_L e di L che massimizzano la potenza sul carico Z_C e calcolare tale potenza massima.

SOLUZIONI

$$Z_1 = 85.44 \Omega$$

$$Z_L = 193.63 \Omega$$

$$L = 8.6 \text{ nH}$$

$$P_D = 4 \text{ W}$$

A) Calcolo di Z_1 .

Il teso chiede di determinare Z_1 in modo che l'impedenza di ingresso vista a monte di questa linea sia puramente reale, ovvero:

$$\text{Im}\{Z_{IN1}(Z_1)\} = 0$$

Bisogna dunque calcolare l'impedenza di ingresso Z_{IN1} della linea con la solita formula del trasporto e imporre che la sua parte immaginaria sia nulla. Per far questo occorre innanzitutto conoscere la lunghezza elettrica della linea e calcolarne la tangente.

Nel vuoto abbiamo che

$$C_0 = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s} \right] \quad \lambda_0 = \frac{C_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 100 \text{ [mm]} \quad \beta_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0} = 62.83 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

ma essendo la linea riempita con un dielettrico di costante dielettrica $\varepsilon_1 = 4$ allora si ha

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} = 50 \text{ [mm]} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 125.66 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

La linea è dunque lunga $\lambda / 8$, essendo $d_1 = 6.25 \text{ mm} = \frac{50 \text{ mm}}{8}$;

questo si può comunque verificare calcolando esplicitamente la sua lunghezza elettrica:

$$\beta \cdot d_1 = 125.66 \cdot \text{[m}^{-1}\text{]} \cdot 6.25 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} = 0.785 \text{ [rad]} \quad \beta \cdot d_1 \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$

da cui $\tan(\beta \cdot d_1) = 1$

In tali condizioni (linea $\lambda/8$) la sua impedenza di ingresso vale:

$$\begin{aligned}
 Z_{IN1} &= Z_1 \frac{Z_C + j \cdot Z_1}{Z_1 + j \cdot Z_C} = Z_1 \frac{(R_C + j \cdot X_C) + j \cdot Z_1}{Z_1 + j \cdot (R_C + j \cdot X_C)} = \\
 &= Z_1 \frac{R_C + j \cdot (Z_1 + X_C)}{(Z_1 - X_C) + j \cdot R_C} = Z_1 \frac{[R_C + j \cdot (Z_1 + X_C)] \cdot [(Z_1 - X_C) - j \cdot R_C]}{(Z_1 - X_C)^2 + R_C^2} \\
 &= Z_1 \frac{R_C \cdot (Z_1 - X_C) + R_C \cdot (Z_1 + X_C) + j \cdot [(Z_1 + X_C) \cdot (Z_1 - X_C) - R_C^2]}{(Z_1 - X_C)^2 + R_C^2} = \\
 &= Z_1 \frac{2 \cdot R_C \cdot Z_1 + j \cdot [Z_1^2 - |Z_C|^2]}{(Z_1 - X_C)^2 + R_C^2}
 \end{aligned}$$

Affinché tale impedenza di ingresso sia puramente reale deve essere nulla la sua parte immaginaria cioè:

$$\begin{aligned}
 Z_1 \frac{Z_1^2 - |Z_C|^2}{(Z_1 - X_C)^2 + R_C^2} &= 0 \\
 Z_1^2 - |Z_C|^2 &= 0 \\
 Z_1^2 &= |Z_C|^2
 \end{aligned}$$

e infine

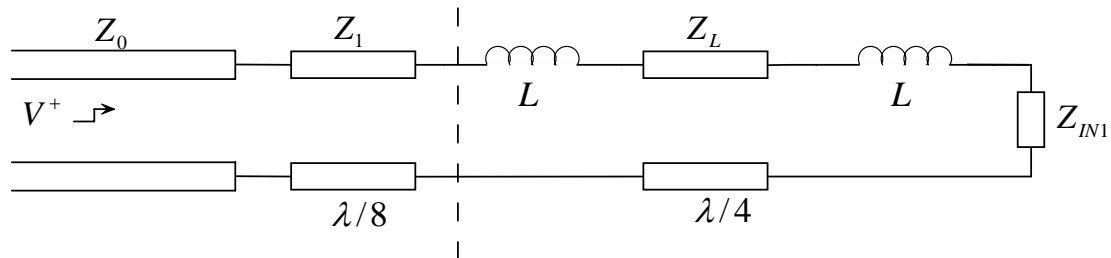
$$Z_1 = |Z_C| = \sqrt{80^2 + 30^2} = 85.44 \quad \Omega$$

Con tale valore di Z_1 , l'impedenza di ingresso è ora puramente reale di valore:

$$Z_{IN1} = Z_1 \frac{2 \cdot R_C \cdot Z_1}{(Z_1 - X_C)^2 + R_C^2} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 85.44^2}{(85.44 - 30)^2 + 80^2} = 59.21 \quad \Omega$$

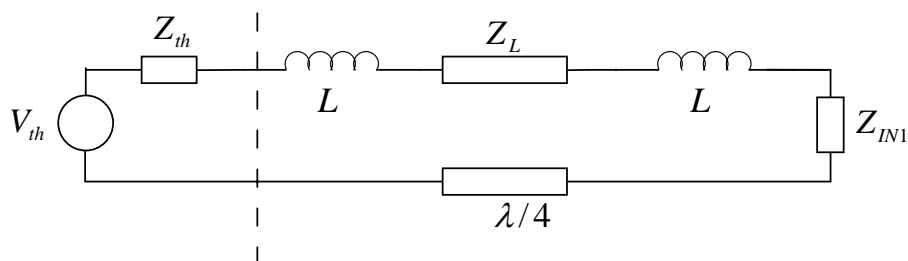
B) Calcolo di Z_L e di L .

Trovata l'impedenza di ingresso reale alla linea Z_1 , il circuito si semplifica come segue:



Ricadiamo in un problema standard di massimizzazione per adattamento coniugato in quanto possiamo lavorare su due parametri liberi L e Z_L per adattare la rete. Bisogna dunque verificare se la condizione di adattamento coniugato ammette soluzioni.

Conviene lavorare sulla sezione in figura e calcolare il generatore equivalente di Thevenin relativamente alla parte sinistra del circuito:



Per imporre l'adattamento coniugato è sufficiente calcolare l'impedenza interna del generatore equivalente di thevenin Z_{th} ; non è viceversa indispensabile (per ora) calcolare il generatore di Thevenin in quanto, qualora riuscissimo ad imporre l'adattamento coniugato, il calcolo della potenza sul carico si potrà eseguire semplicemente calcolando la potenza massima incidente sulla linea di alimentazione Z_0 (non essendo presenti nel circuito altri elementi dissipativi).

L'impedenza interna del generatore di equivalente di Thevenin è pari all'impedenza di ingresso della linea Z_1 (lunga $\lambda/8$ e di impedenza caratteristica nota) chiusa sul carico Z_0 (impedenza della linea di alimentazione):

$$\begin{aligned}
Z_{th} &= Z_1 \frac{Z_0 + j \cdot Z_1}{Z_1 + j \cdot Z_0} = Z_1 \frac{(Z_0 + j \cdot Z_1) \cdot (Z_1 - j \cdot Z_0)}{Z_1^2 + Z_0^2} = \\
&= Z_1 \frac{2 \cdot Z_0 \cdot Z_1 + j \cdot (Z_1^2 - Z_0^2)}{Z_1^2 + Z_0^2} = \\
&= 85.44 \frac{2 \cdot 50 \cdot 85.44 + j \cdot (85.44^2 - 50^2)}{85.44^2 + 50^2} = \\
&= 79.49 + j \cdot 41.85 \, \Omega
\end{aligned}$$

Trovata l'impedenza interna del generatore equivalente di Thevenin, rimane da determinare la sua impedenza di carico alla sezione in figura ed imporre l'adattamento coniugato:

$$(Z_{th})^* = Z_{LO}$$

L'impedenza di carico Z_{LO} è data dalla serie della reattanza induttiva con l'impedenza di ingresso al trasformatore $\lambda/4$, caricato a sua volta dalla serie della seconda reattanza induttiva con l'impedenza Z_{IN} reale e ricavata al punto precedente:

$$Z_{LO} = j \cdot X_L + \frac{Z_L^2}{Z_{IN} + j \cdot X_L} \quad \text{con } Z_{IN} \text{ Reale}$$

Prima ancora di razionalizzare Z_{LO} conviene imporre l'adattamento coniugato:

$$R_{th} - j \cdot X_{th} = j \cdot X_L + \frac{Z_L^2}{Z_{IN} + j \cdot X_L}$$

senza razionalizzare ma rielaborando algebricamente l'eguaglianza si ha:

$$[R_{th} - j \cdot (X_{th} + X_L)] \cdot (Z_{IN} + j \cdot X_L) = Z_L^2$$

Equazione complessa in due variabili reali. Separando parte reale e immaginaria otteniamo un sistema di due equazioni reali in due variabili:

$$Z_L^2 = R_{th} \cdot Z_{IN} + X_L \cdot X_{th} + X_L^2$$

$$0 = R_{th} \cdot X_L + Z_{IN} \cdot (X_{th} + X_L)$$

Dalla seconda si ricava direttamente la reattanza capacitiva :

$$X_L = \frac{Z_{IN} \cdot X_{th}}{R_{th} - Z_{IN}} = \frac{59.21 \cdot 41.85}{74.49 - 59.21} = 162.16 \, \Omega$$

Da cui si ricava

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{162.16}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^9} = 8.6 \, \text{nH}$$

Resta da utilizzare la prima equazione per ricavare Z_L :

$$Z_L = \sqrt{R_{th} \cdot Z_{IN} + X_L \cdot X_{th} + X_L^2} =$$

$$= \sqrt{74.49 \cdot 59.21 + 162.16 \cdot 41.85 + 162.16^2} = 193.63 \, \Omega$$

Essendo riusciti ad imporre la condizione di adattamento coniugato, la potenza trasferita al carico sarà semplicemente, in assenza di altri elementi dissipativi, tutta la potenza incidente sulla linea di alimentazione:

$$P_D = \frac{|V^+|^2}{2 \cdot Z_0} = \frac{20^2}{2 \cdot 50} = 4 \, \text{W}$$